THREE YEAR B.A./B.Sc. DEGREE EXAMINATION, OCTOBER - 2022

CHOICE BASED CREDIT SYSTEM

FOURTH SEMESTER

PART - II - MATHEMATICS

Paper - V : LINEAR ALGEBRA

(Under CBCS New Regulation w.e.f. the academic Year 2021-22)

Time : 3 Hours Max. Marks : 75

SECTION - A

విభాగము - ఎ

Answer any **Five** of the following questions.. (5×5=25)

ఏవైనా **ఐదు** ప్రశ్నలకు సమాధానాలు రాయండి.

1. Prove that the set W of ordered triads $(x, y, 0), x, y \in R$ is a subspace of $V_3(R)$.

   $(x, y, 0), x, y \in R$ అను క్రమత్రికములు కలిగిన సమితి W, $V_3(R)$నకు ఉపాంతరాళం అని నిరూపించండి.

2. Prove that every nonempty subset of linearly independent set of vectors is linearly independent.

   ఋజు స్వతంత్ర సమితి యొక్క ప్రతి శూన్యం కానీ ఉపసమితి ఋజుస్వతంత్రము, అని నిరూపించండి.

3. Show that the set $\{(1,2,1),(2,1,0),(1,-1,2)\}$ form a basis of $V_3(R)$.

   సమితి $\{(1,2,1),(2,1,0),(1,-1,2)\}$, $V_3(R)$ నకు ఆధారం అని చూపండి.

4. Prove that any two basis of a finite dimensional vector space have the same number of elements.

   పరిమిత పరిమాణ సదిశాంతరాళం లోని ఏరెండు ఆధారాల లోని మూలకాల సంఖ్య సమానం అని నిరూపించండి.

5. Find $T(x, y, z)$, where $T : R^3 \rightarrow R$ is defined by T(1,1,1)=3, T(0,1,-2) = 1 and T (0,0,1) = −2.

   $T : R^3 \rightarrow R$ ను T(1,1,1)=3, T(0,1,−2) = 1 మరియు T (0,0,1) = −2 గా నిర్వచిస్తే, $T(x, y, z)$ ను కనుగొనండి.

6. Find the rank of the matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

మాత్రిక $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ యొక్క కోటి కనుగొనండి.

7. Show that the set $S = \left\{ \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \right), \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right), \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right) \right\}$ is an orthonormal set.

సమితి $S = \left\{ \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \right), \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right), \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right) \right\}$ ను లంబాభి లంబ సమితి అని చూపండి.

8. If α, β are two vectors in inner product space $V(F)$, then prove that $\|\alpha + \beta\| \le \|\alpha\| + \|\beta\|$.

అంతర లబ్ధ అంతరాళం $V(F)$ లో α, β లు రెండు సదిశలు అయితే $\|\alpha + \beta\| \le \|\alpha\| + \|\beta\|$ అని చూపండి.

SECTION - B

విభాగము - బి

Answer all the questions. Each question carries **10** marks. **(5×10=50)**

అన్ని ప్రశ్నలకు సమాధానాలు రాయండి. ప్రతి ప్రశ్నకు **10** మార్కులు.

9. a) Let W be a nonempty subset of a vector space $V(F)$. Prove that the necessary and sufficient condition for W to be a subspace of $V(F)$ is $a\alpha + b\beta \in V$ for all $a, b \in F$ and $\alpha, \beta \in W$.

W, సదిశాంతరాళం $V(F)$ నకు శూన్యం కాని ఉపసమితి అనుకోండి. $V(F)$ నకు W, ఉపాంతరాళం కావడానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమం : ప్రతి $a, b \in F$ మరియు $\alpha, \beta \in W$ లకు $a\alpha + b\beta \in V$ కావలెను.

(OR/లేదా)

b) If S is a subset of vector space $V(F)$, then prove that, S is a subspace of $V(F)$ if and only if $L(S) = S$.

సదిశాంతరాళం $V(F)$ నకు S ఉప సమితి అయినపుడు, $V(F)$ నకు S ఉపాంతరాళం మరియు $L(S) = S$ లు తుల్యాలు అని నిరూపించండి.

10. a) Let W_1 and W_2 be two subspaces of a vector space $\mathbb{R}^4$ given by $W_1 = \{(a,b,c,d): b-2c+d=0\}$ and $W_2 = \{(a,b,c,d): a=d, b=2c\}$. Then find $\dim W_1, \dim W_2$ and $\dim(W_1 \cap W_2)$.

$W_1 = \{(a,b,c,d): b-2c+d=0\}$ మరియు $W_2 = \{(a,b,c,d): a=d, b=2c\}$ లు సదిశాంతరాళం $V(F)$ నకు రెండు ఉపాంతరాళాలు అయితే, $\dim W_1, \dim W_2$ మరియు $\dim(W_1 \cap W_2)$ లను కనుగొనండి.

(OR/లేదా)

b) Let W be a subspace of vector space $V(F)$. Then prove that, $\dim\left(\frac{V}{W}\right) = \dim V - \dim W$.

సదిశాంతరాళం $V(F)$ నకు W ఒక ఉపాంతరాళం అయితే, $\dim\left(\frac{V}{W}\right) = \dim V - \dim W$ అని చూపండి.

11. a) State and prove Rank - Nullity Theorem.

కోటి మరియు శూన్యత, సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచించి, నిరూపించండి.

(OR/లేదా)

b) Let $T: U \rightarrow V$ be a linear transformation. Then prove that the following are equivalent.

i. T is non singular.

ii. T is invertible.

$T: U \rightarrow V$ ఒక ఋజు పరివర్తనం అనుకొనుము. T సాధారణం మరియు విలోమం అనేవి తుల్యాలు అని నిరూపించండి.

12. a) Prove that the characteristic vectors corresponding to distinct characteristic roots of a matrix are linearly independent.

ఒక మాత్రిక యొక్క విభిన్న లాక్షణిక మూలాల, లాక్షణిక సదిశలు ఋజు స్వతంత్రాలు అని నిరూపించండి.

(OR/లేదా)

b) Find the characteristic roots and the corresponding characteristic vectors of the matrix

$$A=\begin{pmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

మాత్రిక $A=\begin{pmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ యొక్క లాక్షణిక మూలాలు, వాటి అనురూప లాక్షణిక సదిశలు కనుగొనండి.

13. a) State and prove Cauchy - Schwartz inequality.

కోషీ - ష్వార్ట్జ్ అసమానతను ప్రవచించి, నిరూపించండి.

(OR/లేదా)

b) If $B=\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ be an orthonormal basis of a finite dimensional inner product space *V(F)*, then prove that $<\alpha, \beta>= \sum_{i=1}^{n} <\alpha, \alpha_i><\alpha_i, \beta>$ for all $\alpha, \beta \in V$.

పరిమిత అంతర లబ్ద అంతరాళం V(F) నకు, $B=\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ అనేది లంభాభి లంబ ఆధారం అయితే, అపుడు ప్రతి $\alpha, \beta \in V$ లకు $<\alpha, \beta>= \sum_{i=1}^{n} <\alpha, \alpha_i><\alpha_i, \beta>$ అని నిరూపించండి.